Flux Line の運動 II

都　築　俊　夫（京大理）

（１１月２２日受理）

この報告では、才Ⅰ部にひきつづき、有限温度の場合について述べる。モデルは前回と同様である。しかし超流体領域には正常電子があり、Ohmic current が流れるとする。考えている温度領域は臨界温度に比して十分低く、正常電子の平均自由路 ℓ_0 は λ_L, ξ_0 に比して十分長いとする。

結論をいえば、この場合にも、$O(v_L/c)^2$, $O(\lambda_L/\ell_0)^2$ 以上を無視する近似では、flux line に drift force は働かない。しかし、運動方向とは逆向きの friction force が働く。これは超流体領域にある正常電子の密度に比例する。

才Ⅰ部からの引用は、(I-…)のようにかく。

§1　超流体領域での解

基礎方程式は、London 方程式 (I-1)、加速度方程式 (I-2,3,4)及び Maxwell 方程式 (I-5,6,7,8)である。電流密度 $\underset{\sim}{j}$ は

$$\underset{\sim}{j}=\underset{\sim}{j}_s+\underset{\sim}{j}_n\,;\quad \underset{\sim}{j}_s=-en_s\underset{\sim}{v}_s\,,\quad \underset{\sim}{j}_n=\sigma_0\underset{\sim}{E} \tag{1}$$

である。磁場 $\underset{\sim}{h}$ に対する方程式は

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2\ell_0}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\left(\frac{1}{\lambda_L^2}+\frac{1}{4\ell_0^2}\right)\right]\underset{\sim}{h}=0 \tag{2}$$

となる。ここで

$$1/\ell_0=4\pi\sigma_0 v_L/c^2\,,\quad 1/\lambda_L^2=4\pi n_s e^2/mc^2$$

である。

$$\left\{\begin{array}{l} x-v_L t=\lambda\xi , \\ y=\lambda\eta , \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \xi=\zeta\cos\theta \\ \eta=\zeta\sin\theta \end{array}\right. \quad ; \ \frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda_L^2}+\frac{1}{4\ell_0^2}$$

ととると、$\zeta\to\infty$で$h\to 0$となり、$v_L\to 0$で円対称になる解は

$$h=\alpha\, e^{-\frac{\lambda}{2l_0}\zeta\cos\theta}K_0(\zeta) \tag{3}$$

ここで$K_0(\zeta)$は才2種modified Bessel function。

次に$\underset{\sim}{v_S}$を決める。(I-2)から

$$\underset{\sim}{E}=\frac{m}{e}(\underset{\sim}{v_L}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{v_S} \tag{4}$$

(I-5)に代入すると

$$\frac{\lambda_L^2}{\ell_0}\frac{\partial}{\partial x}\underset{\sim}{v_S}-\underset{\sim}{v_S}=\frac{\lambda_L^2}{mc}\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{h}$$

(3)を用いて成分でかくと

$$\frac{\lambda_L^2}{\ell_0}\frac{\partial}{\partial x}\underset{\sim}{v_S}-\underset{\sim}{v_S}=\frac{\lambda_L^2 e}{mc}\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{h}$$

(3)を用いて成分でかくと

$$\frac{\lambda_L^2}{\ell_0\lambda}\cdot\frac{\partial v_{Sx}}{\partial\xi}-v_{Sx}=-\frac{e\lambda_L^2}{mc\lambda}\alpha\, e^{-\frac{\lambda}{2l_0}\xi}\sin\theta\, K_1(\zeta) \tag{5}$$

$$\frac{\lambda_L^2}{\ell_0\lambda_L}\cdot\frac{\partial v_{Sy}}{\partial\xi}-v_{Sy}=\frac{e\lambda_L^2}{mc\lambda}\alpha\left[\frac{\lambda}{2\ell_0}K_0+\cos\theta\cdot K_1(\zeta)\right]e^{-\frac{\lambda}{2l_0}\xi} \tag{6}$$

$v_{Sx}+iv_{Sy}=w$とおくと

$$\frac{\lambda_L^2}{\ell_0\lambda}\cdot\frac{\partial w}{\partial\xi}-w=\frac{ie\lambda_L^2}{mc\lambda}\alpha\left[\frac{\lambda}{2\ell_0}K_0(\zeta)+e^{i\theta}K_1(\zeta)\right]e^{-\frac{\lambda}{2l_0}\xi} \tag{7}$$

$$w=\frac{ie\lambda_L^2}{mc\lambda}\alpha e^{-\frac{\lambda}{2l_0}\xi}\left[\frac{1}{2}M_0K_0(\zeta)+\sum_{p=1}\{M_p\cos p\theta+iN_p\sin p\theta\}K_p(\zeta)\right] \tag{8}$$

と展開して解を求める。係数M_p, N_pは

$$\lambda_L^2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\ell_0^2}\right)M_0+\frac{\lambda_L^2}{\ell_0\lambda}M_1=-\frac{\lambda}{\ell_0} \tag{9}$$

$$\lambda_L^2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\ell_0^2}\right)M_p+\frac{\lambda_L^2}{2\ell_0\lambda}(M_{p-1}+M_{p+1})=-\delta_{p,1}\quad(p\geqq 1)\tag{10}$$

$$\lambda_L^2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\ell_0^2}\right)N_1+\frac{\lambda_L^2}{2\ell_0\lambda}N_2=-1\tag{11}$$

$$\lambda_L^2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\ell_0^2}\right)N_p+\frac{\lambda_L^2}{2\ell_0\lambda}(N_{p-1}+N_{p+1})=0\quad(p\geqq 2)\tag{12}$$

で決められる。$\ell_0\gg\lambda_L$ として $(\lambda_L/\ell_0)^2$ 以上を無視すると

$$\left.\begin{aligned}M_1&=N_1=-1\\ M_2&=N_2=\frac{\lambda_L}{2\ell_0}\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

従つて

$$\begin{aligned}v_{sx}&=-\frac{e\lambda_L^2}{mc\lambda}\alpha e^{-\frac{\lambda}{2\ell_0}\zeta\cos\theta}\sum_{p=1}N_p\sin p\theta\cdot K_p(\zeta)\\&=+\frac{e\lambda_L}{mc}\alpha\left[\sin\theta\cdot K_1(\zeta)-\frac{\lambda_L}{2\ell_0}\sin 2\theta\left\{\frac{\zeta}{2}K_1(\zeta)+K_2(\zeta)\right\}\right]\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}v_{sy}&=\frac{e\lambda_L^2}{mc\lambda}\alpha e^{-\frac{\lambda}{2\ell_0}\zeta\cos\theta}\left[\frac{1}{2}M_0K_0(\zeta)+\sum_{p=1}M_p\cos p\theta\cdot K_p(\zeta)\right]\\&=-\frac{e\lambda_L}{mc}\alpha\left[\cos\theta\cdot K_1(\zeta)-\frac{\lambda_L}{2\ell_0}\left\{\frac{\zeta}{2}K_1(\zeta)+\cos 2\theta\left(\frac{\zeta}{2}K_1(\zeta)+K_2(\zeta)\right)\right\}\right]\end{aligned}\tag{15}$$

(4)から $\underset{\sim}{E}$ を求める。以後表式が長々となるので λ_L/ℓ_0 の程度まで書く。

$$E_x=-\frac{v_L}{2c}\alpha\left[\sin 2\theta\cdot K_2(\zeta)+\frac{\lambda_L}{2\ell_0}\left\{\sin\theta\left(K_1(\zeta)-\frac{\zeta}{2}K_2(\zeta)\right)-\sin 3\theta\left(\frac{\zeta}{2}K_2(\zeta)+K_3(\zeta)\right)\right\}\right]\tag{16}$$

$$\begin{aligned}E_y=\frac{v_L}{2c}\alpha\Big[&K_0(\zeta)+\cos 2\theta\cdot K_2(\zeta)-\frac{\lambda_L}{2\ell_0}\Big\{\cos\theta\left(\zeta K_0(\zeta)-K_1(\zeta)+\frac{\zeta}{2}K_2(\zeta)\right)\\&+\cos 3\theta\left(K_3(\zeta)+\frac{\zeta}{2}K_2(\zeta)\right)\Big\}\Big]\end{aligned}\tag{17}$$

これは $\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{E}=0$ を充たすから ϕ は

$$\phi=\mu_{s\infty}+\sum_{p=1}\frac{1}{\zeta^{p}}\{A_p^s\cos p\theta+B_p^s\sin p\theta\} \tag{18}$$

このようにして、係数を除いて超流体領域の解は決つた。

§ 2　Core 領域での解

基礎方程式は報告 I と全く同じである。超流体領域で解に λ_L/ℓ_0 の程度の変化が生じたので、境界条件を通して、Core 領域の解にも同程度の変化を生じる。従つて磁場は一様ではなくなる。実際 core 表面で磁場をつなぐと

$$\alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)\left\{1-\frac{a}{2\ell_0}\cos\theta\right\}e^{\frac{a}{2l}\cos\theta}$$

$$=\beta I_0\left(\frac{a}{2\ell}\right)+2\sum_{p=1}\{\beta_{cp}\cos p\theta+\beta_{sp}\sin p\theta\}I_p\left(\frac{a}{2\ell}\right) \tag{19}$$

から

$$\left.\begin{aligned}\beta_{cp}&=\alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)\cdot\frac{I_p\left(\frac{a}{2\ell}\right)-\frac{a}{2\ell_0}I_p'\left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_p\left(\frac{a}{2\ell}\right)} \qquad (p\geq 0)\\ \beta_{sp}&=0 \qquad\qquad (p\geq 1)\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

となる。ここで $\beta_{co}=\beta$ 。従つて

$$h(\zeta,\theta)=\alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)\Big[1-\frac{a}{2\ell_0}e^{-\zeta\cos\theta}\Big\{\frac{I_0'\left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_0\left(\frac{a}{2\ell}\right)}I_0(\zeta)$$

$$+2\sum_{p=1}\cos p\theta\cdot\frac{I_p'\left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_p\left(\frac{a}{2\ell}\right)}I_p(\zeta)\Big\}\Big] \tag{21}$$

$I_p'(\zeta)$ は $dI_p/d\zeta$ を示す。(I-5)から

$$E_x=-\frac{v_La}{4c\ell_0}\alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)e^{-\zeta\cos\theta}\sum_{p=1}\left[\frac{I_{p-1}'\left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_{p-1}\left(\frac{a}{2\ell}\right)}-\frac{I_{p+1}'\left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_{p+1}\left(\frac{a}{2\ell}\right)}\right]\sin p\theta\cdot K_p(\zeta) \tag{22}$$

$$E_y = -\frac{v_L a}{4c\ell_0}\alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)e^{-\zeta\cos\theta}\left[\left\{\frac{I_0'\left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_0\left(\frac{a}{2\ell}\right)} - \frac{I_1'\left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_1\left(\frac{a}{2\ell}\right)}\right\}I_0(\zeta)\right.$$

$$\left. - \sum_{p=1}\left\{\frac{I_{p-1}'\left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_{p-1}\left(\frac{a}{2\ell}\right)} - 2\frac{I_p'\left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_p\left(\frac{a}{2\ell}\right)} + \frac{I_{p+1}'\left(\frac{a}{2\ell}\right)}{I_{p+1}\left(\frac{a}{2\ell}\right)}\right\}\cos p\theta\cdot I_p(\zeta)\right] \tag{23}$$

$\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{E}=0$ を充すので $\underset{\sim}{e}$ のタテ成分は

$$\nabla^2\mu_n = 0$$

で与えられる μ_n から決る。

$$\mu_n = \mu_{n0} + \sum_{p=1}\zeta^p\{A_p^n\cos p\theta + B_p^n\sin p\theta\} \tag{24}$$

境界条件を使つて係数A,Bを決める。$j_\perp$ については自動的につながる。$e_\parallel$，$e_\perp$ の連続条件から（表式が長くなるので結果だけを書く）

$$A_p^s = A_p^n = 0 \qquad (p\geq 1) \tag{25}$$

B_p を $1/\ell_0$ で展開して

$$B_p^s = B_p^{s(0)} + B_p^{s(1)},\quad B_p^n = B_p^{n(0)} + B_p^{n(1)} \tag{26}$$

とかくと、$B_p^{s(0)}$, $B_p^{n(0)}$ は報告Iで与えたものになる。

$$B_p^{s(0)} = \frac{v_L e a^2}{2c\lambda_L}\alpha K_2\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)\delta_{p,1} \quad (p\geq 1) \tag{27}$$

$$B_p^{n(0)} = -\frac{v_L e\ell}{c}\alpha K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)\delta_{p,1} \quad (p\geq 1) \tag{28}$$

$B_p^{s(1)}$, $B_p^{n(1)}$ は

$$B_p^{s(1)} = \frac{v_L e a\ell}{4c\ell_0}\alpha\frac{1}{p}\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)^p\left[K_0\,\delta_{p,1} - \frac{\lambda_L}{4\ell}\left\{K_1' - \frac{2a}{\lambda_L}K_2 - 3K_3\right\}\delta_{p,2}\right.$$

$$-\frac{a}{\ell}K_0\{\sum_{q=0}(-)^{p-q}\frac{I_{p-q}}{I_q}(I_q'^2-I_qI_q'')$$

$$+\sum_{q=1}(-)^{p+q}\frac{I_{q+p}}{I_q}(I_q'^2-I_qI_q'')\}] \tag{29}$$

$$B_p^{n(1)}=\frac{v_Lea\ell}{4c\ell_0}\alpha\frac{1}{p}(\frac{2\ell}{a})^p[K_0\delta_{p,1}-\frac{\lambda_L}{4\ell}\{K_1'-\frac{2a}{\lambda_L}K_2-2K_3\}\delta_{p,2}$$

$$-\frac{a}{\ell}K_0\{\sum_{q=0}(-)^{p-q}\frac{I_{p-q}}{I_q}(I_q'^2-I_qI_q'')$$

$$+\sum_{q=1}(-)^{p+q}\frac{I_{p+q}}{I_q}(I_q'^2-I_qI_q'')\}] \tag{30}$$

となる。ここで $K_p=K_p(a/\lambda_L)$，$I_p=I_p(a/2\ell)$ である。

最後に量子条件から α を決める。結果は

$$\varphi_0=\pi a^2\alpha K_0(\frac{a}{\lambda_L})[1-\frac{a}{2\ell_0}\{\frac{I_1^3}{I_0}-2\sum_{p=1}(-)^p\frac{I_{p-1}I_p'I_{p+1}}{I_p}\}] \tag{31}$$

となる。φ_0 は単位磁束量子である。

§3　エネルギー・運動量定理

エネルギー運動量定理

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\underset{\sim}{g}_S+\underset{\sim}{g}_f\}+(\rho_n+\rho_i)\underset{\sim}{e}+\frac{1}{c}\underset{\sim}{j}_n\times\underset{\sim}{h}$$

$$+\underset{\sim}{\nabla}\cdot[-\frac{1}{e}\rho_S\phi\overleftrightarrow{1}+\overleftrightarrow{T}(\underset{\sim}{e})+\overleftrightarrow{T}(\underset{\sim}{h})+\overleftrightarrow{S}]=\underset{\sim}{f}^{ext} \tag{32}$$

を用いて力について考える。超流体領域にわたつて積分する。z方向には単位長さを取る。flux line の drift motion に関係するy方向の力については、報告Ⅰと同様全く力をうけない。しかしx方向には friction force が残り、それは $1/\ell_0$ に比例する（$1/\ell_0=4\pi\sigma_0v_L/c^2$）。例えば、$\underset{\sim}{j}_n$ はy方向に平均の流れを与え、従つて $\underset{\sim}{j}_n\times\underset{\sim}{h}$ によりx方向の力となる。又 $\nabla\cdot\overleftrightarrow{S}$ も同様な力を与える。残りの項は寄与しない。結局 total forceとして

$$F_x^{ext}=\frac{\lambda_L^{\;2}}{4\ell_0}\alpha^2\left[\int_{a/\lambda_L}^{\infty}\zeta K_0^{\;2}(\zeta)\,d\zeta+\frac{a^2}{2\lambda_L^{\;2}}K_1^{\;2}(\zeta)\right] \tag{33}$$

となる。flux line は反作用として $-F_x^{ext}$ で与えられる friction を受ける。

§4 結　論

有限温度で超流体領域にも正常電子があり、それらにより、Ohmic current が流れる場合について調べた。flux line に働くマグナス力は、background positive charge から受ける力と完全に打ち消し合う。flux line は drift motion をしない。しかしながら、運動方向とは逆向きの力を flux line は受け、やがてとまつてしまう。この力は $(n-n_S)v_L$ に比例する（nは全電子密度）。我々が考えたような臨界温度より十分低い温度領域では、この力は非常に弱い。

de Sorbo の実験結果や flux lineの振動の問題等については、ひきつづき考えてみるつもりである。